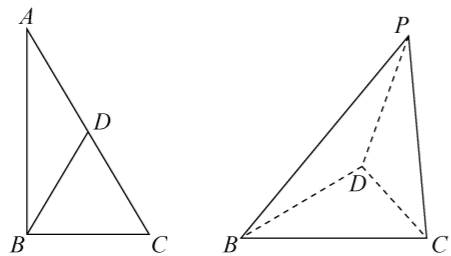


12. 在直角三角形 ABC 中, $\angle B = \frac{\pi}{2}$, $AC = 2BC = 4$, D 为线段 AC 的中点, 如图, 将 $\triangle ABD$ 沿 BD 翻折, 得到三棱锥 $P-BCD$ (点 P 为点 A 翻折到的位置), 在翻折过程中, 下列说法正确的是



- A. $\triangle PBD$ 的外接圆半径为 2
 B. 存在某一位置, 使得 $PD \perp BD$
 C. 存在某一位置, 使得 $PB \perp CD$
 D. 若 $PD \perp DC$, 则此时三棱锥 $P-BCD$ 的外接球的体积为 $\frac{32}{3}\pi$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

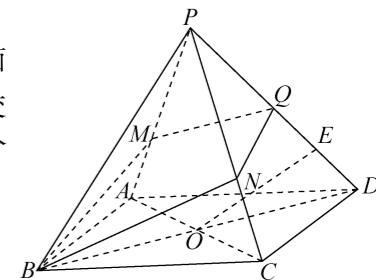
13. 若 $\tan(\pi - \alpha) = 4$, 则 $\cos(2\alpha + \frac{3}{2}\pi) =$ _____.
14. 已知向量 a, b 满足: $a \cdot b = -1$, $|b| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $|a - b| = \frac{\sqrt{42}}{2}$, 则向量 a 与 b 的夹角为 _____.
15. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , M 为椭圆 C 上任意一点, N 为圆 $E: (x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$ 上任意一点, 则 $|MN| - |MF_1|$ 的最小值为 _____.
16. 已知函数 $f(x) = 2axe^x - (a-1)e^{2x} + x^2$, $x \in (-1, 1)$, 若 $f(x)$ 有两个不同的零点, 则实数 a 的取值范围是 _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)
 在 ① $2a \sin C = c \tan A$; ② $2a \cos B = 2c - b$;
 ③ $2 \cos^2 \frac{B+C}{2} = \cos 2A + 1$; 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 并作答.
 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 已知 _____.
 (1) 求 A 的值;
 (2) 若 $\triangle ABC$ 面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 周长为 5, 求 a 的值.
 注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

18. (12 分)
 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n \cdot a_{n+1}}$.
 (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 (2) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12 分)
 如图, 在正四棱锥 (底面是正方形, 顶点在底面的射影为底面正方形的中心) $P-ABCD$ 中, $AB = 2$, $PA = 2\sqrt{2}$, AC 与 BD 交于点 O , 平面 $BMQN$ 为直线 PD 的垂面, 且与 PA, PC, PD 分别交于 M, N, Q 三点, 点 E 在线段 PD 上, 且满足 $PE = 3ED$.
 (1) 证明: $OE \parallel$ 平面 $BMQN$;
 (2) 求直线 NQ 与平面 PAB 所成角的正弦值.



20. (12 分)
 已知过抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 作直线 l 交抛物线 C 于 A, B 两点, 当直线 l 垂直于 x 轴时, $|AB| = 4$.
 (1) 求抛物线 C 的方程;
 (2) 过直线 $l': x = -2$ 上一点 M 做抛物线 C 的两条切线, 设切点为 P, Q .
 求证: 直线 PQ 过定点.

21. (12 分)
 某商场拟在年末进行促销活动, 为吸引消费者, 特别推出“玩游戏, 送礼券”的活动, 游戏规则如下: 每轮游戏都抛掷一枚质地均匀的骰子 (形状为正方体, 六个面的点数分别为 1, 2, 3, 4, 5, 6), 若向上点数不超过 2 点, 获得 1 分, 否则获得 2 分, 进行若干轮游戏, 若累计得分为 19 分, 则游戏结束, 可得到 200 元礼券, 若累计得分为 20 分, 则游戏结束, 可得到纪念品一份, 最多进行 20 轮游戏.
 (1) 当进行完 3 轮游戏时, 总分为 X , 求 X 的期望;
 (2) 若累计得分为 i 的概率为 p_i , (初始得分为 0 分, $p_0 = 1$).
 ① 证明: 数列 $\{p_i - p_{i-1}\}$, ($i = 1, 2, \dots, 19$) 是等比数列;
 ② 求活动参与者得到纪念品的概率.

22. (12 分)
 已知函数 $f(x) = x^2 - \ln x$.
 (1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
 (2) 证明: $\frac{f(x)}{x} + \frac{1}{4}x^2 - x > -\frac{1}{4}$.